И.Г. ГУРШЕВ

О доказательстве теоремы Ферма

Санкт-Петербург
Издательство «Знакъ»
2012

ББК 26.23

Гуршев И.Г.

О доказательстве теоремы Ферма. – СПб.: Издательство «Знакъ», 2012. – 8 с.

В работе приведены преобразования уравнения $x^n+y^n=z^n$, позволяющие получить квадратное уравнение. Показано, что вышеназванное равенство для трех действительных разных целых положительных чисел не выполняется.

Библ.5

ISBN 978-5-91638-054-5

История доказательства знаменитой теоремы Ферма в популярной форме изложена в книге С. Сингха [1]. В книге П. Рибенбойма [2] соединены строгость математических результатов и историческое изложение более чем трехвековой истории поиска доказательства теоремы Ферма. Теорема утверждает, что уравнению $x^n + y^n = z^n$ при наличие целого положительного $n \geq 3$ $(n > 0)$, не могут удовлетворять никакие целые положительные числа *x, y, z* [3].

В работе А.Я. Хинчина [3] не только даются сведения по истории доказательства этой теоремы, но и уделяется внимание методу, которым мог пользоваться П. Ферма при доказательстве теоремы. Отметим, что в упомянутых работах приводится значительное количество литературных источников.

Рассмотрим частный случай упомянутого соотношения при $n = 3$. Предположим, что для разных целых положительных чисел *x, y, z* ($x \neq y$, $y \neq z$, $z \neq x$, $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$) выполняется следующее равенство

$$x^3 + y^3 = z^3. \qquad (1)$$

Так как $z \neq 0$, то представим уравнение (1) следующим образом

$$\left(\frac{x}{z}\right)^3 + \left(\frac{y}{z}\right)^3 = 1 \text{ (а)}, \quad x_1^3 + y_1^3 = 1 \text{ (б)}, \qquad (2)$$

$$x_1 = \frac{x}{z}, \; y_1 = \frac{y}{z}.$$

При этом предполагаем, что рассматриваемые числа *x, y, z* попарно взаимно простые. Если же *x, y, z* имеют общие делители, то их можно предварительно упростить за счет сокращения общих делителей.

Рассмотрим более подробно равенство (2а), в котором сумма дробей равна единице. Значит, каждая из дробей меньше единицы, то есть $\frac{x}{z} < 1$, $\frac{y}{z} < 1$. Так как неравенства одинакового смысла можно почленно складывать [5], то из последних неравенств следует, что $x_1 + y_1 < 2$. Проводя преобразование третьих степеней в уравнении (2б), получим

$$(x_1 + y_1)(x_1^2 - x_1 y_1 + y_1^2) = 1 . \qquad (3)$$

Дальнейшие рассуждения будем проводить согласно работе [4]. Величины x_1, y_1 являются положительными дробями, то есть являются положительными рациональными числами. Сумма $x_1 + y_1$ есть рациональное положительное число, так как $x_1 > 0$, $y_1 > 0$, то есть $x_1 + y_1 > 0$. Положительное рациональное число можно представить в виде несократимой дроби $m = \frac{a}{b}$, где a и b – натуральные взаимно простые числа, то есть $x_1 + y_1 = \frac{a}{b} = m$. Объединяя вышеприведенные рассуждения, получим следующие неравенства: $2 > x_1 + y_1 > 0$, $2 > m > 0$. Второй множитель в равенстве (3) является положительным, так как может быть представлен в таком виде $x_1^2 - x_1 y_1 + y_1^2 = (x_1 - \frac{1}{2} y_1)^2 + \frac{3}{4} y_1^2 > 0$. Тогда имеем $m\left(x_1^2 - x_1 y_1 + y_1^2\right) = 1$ и отсюда $x_1^2 - x_1 y_1 + y_1^2 = \frac{1}{m}$. Равенство (3) может быть представлено в виде системы уравнений

$$x_1 + y_1 = m \text{ (а)}, \quad x_1^2 - x_1 y_1 + y_1^2 = \frac{1}{m} \text{ (б)}. \qquad (4)$$

Отметим, что, умножив левые и правые части равенств (4а) и (4б) друг на друга, получим равенство (3). Из системы уравнений (4) находим $x_1 = m - y_1$ и, подставляя в равенство (4б), получаем следующее уравнение

$$3my_1^2 - 3m^2 y_1 + m^3 - 1 = 0 \qquad (5)$$

Рассмотрим следствия из уравнения (5).

Допустим, что уравнение (5) имеет корни t_0, t_1, являющиеся целыми числами, и пусть $y_1 = t_1$. Подставив $y_1 = t_1$ в уравнение (5), получим такое равенство

$$t_1^2 = mt_1 - \frac{m^2}{3} + \frac{1}{3m}. \qquad (6)$$

Допустим, что m – дробное число. Тогда в равенстве (6) справа стоит дробное число $\frac{at_1}{b} - \frac{a^2}{3b^2} + \frac{b}{3a}$, а слева находится целое число t_1^2. Но равенство целого и дробного чисел невозможно. Значит, уравнение (5) не имеет корней в виде целых чисел. Ранее отмечалось, что переменная m подчиняется неравенствам $2 > m > 0$. В этом интервале чисел имеется целое число равное единице, и оно может быть представлено в виде несократимой дроби, то есть $m = \frac{a}{b} = \frac{1}{1} = 1$. В этом случае равенство (5) принимает такой вид: $y_1(y_1 - 1) = 0$.

Если $y_1 = 0$, $y_1 - 1 \neq 0$, то, так как $\frac{y}{z} = y_1 = 0$, имеем y=0. В случае $y_1 \neq 0$ имеем $y_1 - 1 = 0$, $y_1 = 1$.

При $\frac{y}{z} = y_1 = 1$ получаем $y = z$. В итоге находим: а) $y = 0$; б) $y = z$. С помощью равенства (4а) получаем значения величины x, а именно: а) $\frac{x}{z} = 1$, $x = z$; б) $x_1 + 1 = 1$, $x = 0$.

Подставляя эти значения x, y, z в уравнение (1) отмечаем, что найденные величины $x = z$, $y = 0$, а также $x = 0$, $y = z$, являясь целыми числами, удовлетворяют уравнению (1). Однако эти значения не удовлетворяют условиям задачи.

Таким образом, равенство (1) для трёх действительных целых положительных чисел не выполняется.

Рассмотрим общий случай, то есть предположим, что для разных целых положительных чисел выполняется равенство

$$x^n + y^n = z^n, \; n > 0, \; n > 3. \qquad (7)$$

При этом предполагаем, что числа x, y, z попарно не имеют общих делителей.

Преобразуем равенств (7) следующим образом

$$\left(\frac{x}{z}\right)^{\frac{n3}{3}} + \left(\frac{y}{z}\right)^{\frac{n3}{3}} = 1 \text{ (а)}, \; x_2^3 + y_2^3 = 1 \text{ (б)},$$

$$x_2 = \left(\frac{x}{z}\right)^{\frac{n}{3}}, \; y_2 = \left(\frac{y}{z}\right)^{\frac{n}{3}}. \qquad (8)$$

Рассмотрим более подробно равенство (8б), в котором сумма дробей равна единице. Значит, каждая из дробей меньше единицы, то есть $x_2 < 1$, $y_2 < 1$. Из этих неравенств следует что, $x_2 + y_2 < 2$.

Проводя преобразование третьих степеней в уравнении (8б), получим

$$(x_2 + y_2)(x_2^2 - x_2 y_2 + y_2^2) = 1. \qquad (9)$$

Сумма $x_2 + y_2 > 0$, так как $x_2 > 0$, $y_2 > 0$. Объединяя предыдущее неравенство с последним находим выражение $2 > x_2 + y_2 > 0$. Второй множитель в равенстве (9) является положительным, так как может быть представлен в виде $x_2^2 - x_2 y_2 + y_2^2 = \left(x_2 - \frac{1}{2} y_2\right)^2 + \frac{3}{4} y_2^2 > 0$.

Пусть $x_2 + y_2 = p$ есть некоторое число, которое может быть как дробным, так и целым, так как $2 > p > 0$. Тогда $p\left(x_2^2 - x_2 y_2 + y_2^2\right) = 1$, и равенство (9) может быть представлено в виде системы уравнений

$$x_2 + y_2 = p \text{ (а)}, \; x_2^2 - x_2 y_2 + y_2^2 = \frac{1}{p} \text{ (б)} \qquad (10)$$

Отсюда находим $x_2 = p - y_2$ и, подставляя x_2 в равенство (10б), получаем уравнение для определения переменной y_2

$$3 p y_2^2 - 3 p^2 y_2 + p^3 - 1 = 0. \qquad (11)$$

Рассмотрим некоторые следствия из уравнения (11). Допустим, что уравнение (11) имеет корни t_2 и t_3. Пусть $y_2 = t_3$ есть целое число и один из двух корней квадратного уравнения (11). Поставив $y_2 = t_3$ в (11), получим следующее равенство

$$t_3^2 = pt_3 - \frac{p^2}{3} + \frac{1}{3p}. \qquad (12)$$

Допустим, что p – дробное число. Тогда в равенстве (12) справа стоит дробное число, а слева находится целое число t_3^2. Но такое равенство невозможно, то есть если p – дробное число, то уравнение (11) не имеет корней в области целых чисел.

Ранее отмечалось, что переменная p может изменяться в пределах $2 > p > 0$. В этом интервале чисел имеется целое число равное единице. В связи с этим рассмотрим случай $p = 1$. При $p = 1$ равенство (11) принимает такой вид

$y_2(y_2 - 1) = 0$. Если $y_2 = 0$, $y_2 - 1 \neq 0$, то $\left(\frac{y}{z}\right)^{\frac{n}{3}} = y_2 = 0$ и имеем $y = 0$. В случае $y_2 \neq 0$ имеем $y_2 - 1 = 0$, $y_2 = 1$. При $\left(\frac{y}{z}\right)^{\frac{n}{3}} = y_2 = 1$ получаем $y^{\frac{n}{3}} = z^{\frac{n}{3}}$. Возведя обе части последнего равенства в степень $\frac{3}{n}$, получим $y = z$. В итоге получаем: а) $y = 0$; *б*) $y = z$. С помощью равенства (10а) получаем значения величины x в случае $p = 1$: а) $y = 0, x = z$; б) $y = z, x = 0$. Отметим, что найденные величины $x, y, z,$ являясь целыми числами, удовлетворяют уравнению (7). Однако эти значения не удовлетворяют условиям задачи. Таким образом, равенство (7) для трёх разных действительных целых положительных чисел не выполняется.

Литература

1. Сингх С. Великая теорема Ферма. – М.: Издательство Московского центра непрерывного математического образования, 2000. – 288 с.

2. Рибенбойм П. Последняя теорема Ферма для любителей. – М.: Мир, 2003. – 429 с.

3. Хинчин А.Я. Великая теорема Ферма. – М.: Изд-во ЛКИ, 2007. – 75 с.

4. Аносов Д.В. Взгляд на математику и нечто из нее. – М.: Издательство Московского центра непрерывного математического образования, 2003. – 23 с.

5. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗов. – М.: Наука, 1981. – 720 с.

Научное издание

Гуршев Игорь Глебович

О доказательстве теоремы Ферма

Издание выходит в авторской редакции

Подписано в печать 18.06.12 Формат 60x90/16
Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 0,46
Тираж 60 экз.
Заказ №1806/01-Р

Мини-типография «Знакъ» издательства «Знакъ»

191011, Санкт-Петербург, Невский пр., 32-34

тел.: (812) 571-07-33, 571-16-42

www.ooo-znak.ru

e-mail: info@ooo-znak.ru